MATRICI

Per matrice $m \times n$ si intende un insieme di numeri disposti su m righe e n colonne

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(m-1)} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(m-1)} & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \ddots & a_{(n-1)(m-1)} & a_{(n-1)m} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(m-1)} & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Ciascuno degli elementi di A è dotato di due indici, il primo si riferisce alla riga il secondo alla colonna, così l'elemento a_{ij} è l'elemento di A che appartiene alla *i-esima* riga e alla *j-esima* colonna di A. La matrice A può essere indicata brevemente scrivendo $A = \left(a_{ij} \right)$, per $i = 1,\ldots,m$ e $j = 1,\ldots,n$

MATRICE QUADRATA

Se $m = n$ la matrice si dice quadrata.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \ddots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

DETERMINANTI

Ad ogni matrice quadrata A si può associare un numero reale detto "*il determinante di* A" e denotato con $D(A)$ o $\det(A)$.

Se A è una matrice $n \times n$ su $\Re$ (*Reali*), per ogni $i, j = 1,\ldots,n$ denoteremo con A_{ij} la matrice $(n-1)\times(n-1)$ che si ottiene sopprimendo la riga *i-esima* e la colonna *j-esima* di A.

Data la matrice $n \times n$ $A = (a_{ij})$ e fissata a piacere una riga di A, diciamo la *i-esima* , definiamo

$$D(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} D(A_{i1}) + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} D(A_{in})$$

Rango di una matrice

Il rango di una matrice A (rang A) è l'ordine massimo dei minori di A aventi determinante diverso da 0.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

A è una matrice 3x2 i **minori** sono le matrici quadrate 2x2 e 1x1:

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ottenuto "cancellando" da A la prima riga

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ottenuto "cancellando" da A la seconda riga

$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ottenuto "cancellando" da A la terza riga

$A_{11} = (1)$

$A_{12} = (3)$

$A_{21} = (1)$

$A_{22} = (1)$

$A_{31} = (2)$

$A_{32} = (2)$

Vado a "calcolare" i determinanti dei minori:

$\det A_1 = 0$

$\det A_2 = -6 \neq 0$

Ho trovato un minore A_2 il cui determinante è diverso da 0, tale minore ha ordine 2 (è una matrice 2x2) da ciò si ha che rang A = 2

SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & = & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Sistema lineare di *m* equazioni in *n* incognite

Ad ogni sistema lineare si possono associare due matrici:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrice dei coefficienti

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Matrice completa

Se la matrice dei coefficienti è quadrata e il suo determinante è diverso da 0 il sistema è di Cramer (Kramer) e ammette un'unica soluzione.

Sia $x_1 A^1 + \ldots + x_n A^n = B$ **un sistema di Cramer. Esiste allora una ed una soluzione del sistema. Essa è per j = 1,…,n**

$$x_j = \frac{\det(A^1, \ldots, B, \ldots, A^n)}{\det(A)}$$

ove $(A^1,\ldots,B,\ldots,A^n)$ **è la matrice dei coefficienti che si ottiene da** $A = (A^1,\ldots,A^n)$ **sostituendo la colonna** A^j **con la colonna B (colonna dei "termini noti").**

Esempio

Consideriamo il seguente sistema lineare di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y + z = -1 \\ -x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 8 \neq 0$$

Il sistema è un sistema di Cramer. La soluzione è una terna di numeri reali (x_0, y_0, z_0)

$$x_0 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}}{8} = -\frac{1}{4} \qquad y_0 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}}{8} = -\frac{5}{4}$$

$$z_0 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}{8} = \frac{3}{4}$$

***Ma** se la matrice dei coefficienti non è quadrata o se lo è ma il suo determinante è nullo cosa posso dire sulle soluzioni?*

Nel caso generale di un sistema lineare non omogeneo (B≠(0)) di *m* equazioni in *n* incognite possono esistere o non esistere soluzioni.

Un criterio per stabilirlo a priori è fornito dal seguente **teorema di Rouché-Capelli**:

> Teorema. Il sistema lineare $x_1 A^1 + \ldots + x_n A^n = B$ ammette soluzioni se e solo se $rang(A^1, \ldots, A^n) = rang(A^1, \ldots, A^n, B)$

In base al teorema generale di Rouché-Capelli (di cui Cramer è un caso particolare) si ha:

- **se il rango della matrice dei coefficienti coincide con il rango della matrice completa (**rang A = rang $\tilde{A}$ **) il sistema lineare ha soluzioni .**
- **se** rang A $\neq$ rang $\tilde{A}$ **il sistema lineare non ha soluzioni.**

Ricapitolando un sistema lineare può avere: una, nessuna o infinite soluzioni.

Se il sistema ammette soluzioni esse sono ∞^{n-r} ove *n* è il numero delle incognite e *r* è il rango comune ad A e $\tilde{A}$ quindi:

- se $n = r$ il sistema ha una sola soluzione
- se $n > r$ il sistema ha infinite soluzioni

Traccia di "lavoro"

numero equazioni *m*

numero incognite *n*

Come procedere :

Caso *m* = *n* ($\Rightarrow$ la matrice dei coefficienti è quadrata)

Calcolare il determinante della matrice dei coefficienti (det A)

- det A $\neq$ 0 il sistema è di Cramer $\Rightarrow$ il sistema ammette un'unica sol.ne.

Calcolare la n-upla soluzione.

- det A = 0 il sistema non è di Cramer può non avere soluzioni o averne infinite.

Determino il rang $\tilde{A}$ e il rang A e per Roché-Capelli se:

rang $\tilde{A}$ = rang A il sistema ammette infinite sol.ni

rang $\tilde{A}$ $\neq$ rang A il sistema non ammette sol.ni)

Caso $m \neq n$ ($\Rightarrow$la matrice dei coefficienti non è quadrata)

Vado a studiare il rang $\tilde{A}$ e il rang A e per Rouché - Capelli se:

- rang $\tilde{A}$ = rang A **=** ***r* = *n*** il sistema ammette un sola sol.ne
- rang $\tilde{A}$ = rang A con n>r il sistema ammette infinite sol.ni.
- rang $\tilde{A}$ $\neq$ rang A il sistema non ammette sol.ni

(Vedere a completamento teoria ed esercizi cap. 8 libro di testo)